

Θεωρητικό Πλαίσιο για τα Μαθηματικά (PISA 2022)

Ορισμός Μαθηματικού Γραμματισμού

Στο Πρόγραμμα PISA 2022, ο μαθηματικός γραμματισμός ορίζεται ως:

«η ικανότητα ενός ατόμου να χρησιμοποιεί μαθηματικό συλλογισμό και να διατυπώνει, να εφαρμόζει και να ερμηνεύει τα μαθηματικά για να επιλύσει προβλήματα σε μια ποικιλία πραγματικών καταστάσεων της καθημερινής ζωής. Περιλαμβάνει έννοιες, διαδικασίες, γεγονότα και εργαλεία για περιγραφή, εξήγηση και πρόβλεψη φαινομένων. Βοηθά τα άτομα να γνωρίζουν τον ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο και να μπορούν να ασκήσουν τεκμηριωμένη κριτική καθώς και να πάρουν εκείνες τις αποφάσεις που απαιτούνται ως σκεπτόμενοι, δημιουργικοί και ενεργοί πολίτες του 21^{ου} αιώνα», (OECD, 2018).

Το θεωρητικό πλαίσιο του PISA 2022, εκτιμά και διατηρεί τις βασικές ιδέες του μαθηματικού γραμματισμού, όπως αυτές αναπτύχθηκαν στους κύκλους του PISA 2003 και του PISA 2012. Παράλληλα αναγνωρίζει μια σειρά αλλαγών στον κόσμο των μαθητών/τριών, οι οποίες με τη σειρά τους σηματοδοτούν μια αλλαγή στον τρόπο αξιολόγησης του μαθηματικού γραμματισμού σε σύγκριση με την προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε σε προηγούμενα πλαίσια. Η αλλαγή αυτή αναφέρεται στην τάση απομάκρυνσης από την ανάγκη εκτέλεσης βασικών υπολογισμών, αφού οι μαθητές/μαθήτριες ζουν πλέον σε ένα ταχύτατα μεταβαλλόμενο κόσμο που καθοδηγείται από τις νέες τεχνολογίες, και απαιτεί από τους πολίτες να είναι δημιουργικοί/ές και να εμπλέκονται στα κοινά, λαμβάνοντας καθημερινά μη συνήθεις αποφάσεις για τον εαυτό τους και την κοινωνία στην οποία ζουν.

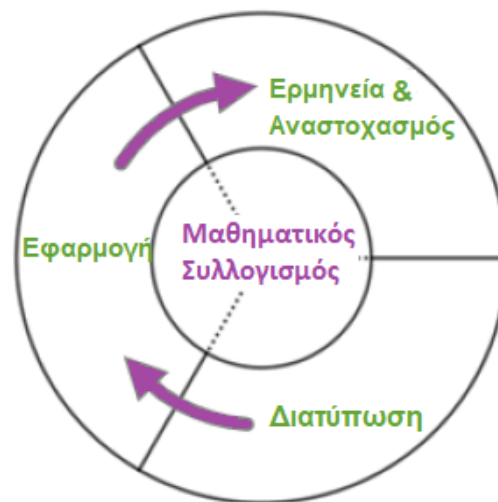
Καθώς η τεχνολογία διαδραματίζει αυξανόμενο ρόλο στη ζωή των μαθητών/τριών, η μακροπρόθεσμη πορεία του μαθηματικού γραμματισμού πρέπει επίσης να περιλαμβάνει τη συνεργατική και αμοιβαία σχέση μεταξύ μαθηματικού συλλογισμού και υπολογιστικής σκέψης (Wing, 2006), δηλαδή του «τρόπου με τον οποίο σκέφτονται οι επιστήμονες της πληροφορικής». Η υπολογιστική σκέψη θεωρείται ως η διαδικασία σκέψης που περιλαμβάνει τη διατύπωση προβλημάτων, αλλά και τον σχεδιασμό των λύσεων τους σε μια μορφή που μπορεί να εκτελεστεί από έναν υπολογιστή, έναν άνθρωπο ή και από τους δύο (Wing, 2011). Ο ρόλος που διαδραματίζει η υπολογιστική σκέψη στα μαθηματικά περιλαμβάνει το πώς συγκεκριμένα θέματα των μαθηματικών αλληλεπιδρούν με συγκεκριμένα θέματα της πληροφορικής και πώς ο μαθηματικός συλλογισμός συμπληρώνει την υπολογιστική σκέψη (Gadanidis, 2015; Rambally, 2017).

Κατά συνέπεια στο επίκεντρο της αξιολόγησης του PISA 2022 βρίσκεται τόσο η ικανότητα για μαθηματικό συλλογισμό, η οποία αποτελούσε πάντα μέρος του θεωρητικού πλαισίου του PISA, όσο και ανάγκη για τους/τις μαθητές/μαθήτριες να αναπτύξουν έννοιες υπολογιστικής σκέψης που αποτελούν μέρος του μαθηματικού γραμματισμού.

Λειτουργικός Ορισμός Μαθηματικού Γραμματισμού

Ο ορισμός του μαθηματικού γραμματισμού δίνει έμφαση στην ενεργή εμπλοκή του ατόμου με τα μαθηματικά για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων της καθημερινής ζωής, σε διαφορετικά πλαίσια και περιλαμβάνει τόσο τον μαθηματικό συλλογισμό (παραγωγικό και επαγωγικό) όσο και την επίλυση προβλήματος με τη χρήση μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών, γεγονότων και εργαλείων για την περιγραφή, εξήγηση και πρόβλεψη φαινομένων.

Ο κύκλος μοντελοποίησης (διατύπωση, εφαρμογή, ερμηνεία και αναστοχασμός) είναι μια κεντρική πτυχή των μαθηματικά εγγράμματων μαθητών/μαθητριών σύμφωνα με το PISA. Η αναπαράσταση που φαίνεται στο Σχήμα 1 διατηρεί και ενσωματώνει την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης, που υπήρξε ιστορικά ακρογωνιαίος λίθος του θεωρητικού πλαισίου PISA για τα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, τα ρήματα «διατυπώνω», «εφαρμόζω» και «ερμηνεύω/αναστοχάζομαι» υποδεικνύουν τις τρεις διαδικασίες στις οποίες θα συμμετάσχουν οι μαθητές/μαθήτριες ως ενεργοί «λύτες» προβλημάτων. Η *διατύπωση* μαθηματικών καταστάσεων περιλαμβάνει την εφαρμογή μαθηματικού συλλογισμού (παραγωγικού και επαγωγικού) για τον μετασχηματισμό καταστάσεων της καθημερινής ζωής, ώστε να μπορούν να τύχουν μαθηματικού χειρισμού. Η *εφαρμογή* περιλαμβάνει την χρήση μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών, συλλογισμού και δεδομένων για την επίλυση ενός προβλήματος. Η *ερμηνεία και ο αναστοχασμός* περιλαμβάνει την χρήση μαθηματικού συλλογισμού για την αξιολόγηση της λογικότητας μαθηματικών λύσεων σε σχέση με το πλαίσιο μιας προβληματικής κατάστασης.



Σχήμα 1. Μαθηματικός γραμματισμός: Η σχέση ανάμεσα στον μαθηματικό συλλογισμό και στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος (μοντελοποίηση)

Ωστόσο, συχνά δεν είναι απαραίτητο να συμμετάσχει κανείς σε κάθε στάδιο του κύκλου της μοντελοποίησης, ειδικά στο πλαίσιο, μιας αξιολόγησης (Galbraith, Henn and Niss, 2007). Συχνά σημαντικά μέρη του μαθηματικού κύκλου της μοντελοποίησης έχουν αναπτυχθεί από άλλους και ο τελικός χρήστης εκτελεί ορισμένα από τα βήματα του κύκλου μοντελοποίησης, αλλά όχι όλα. Για παράδειγμα, σε ορισμένες περιπτώσεις, δίνονται μαθηματικές αναπαραστάσεις, όπως γραφήματα ή εξισώσεις, που μπορούν τυχόν άμεσου χειρισμού για να απαντηθούν ερωτήσεις ή να εξαχθούν συμπεράσματα. Σε άλλες περιπτώσεις, οι μαθητές/μαθήτριες μπορεί να χρησιμοποιούν προσομοιώσεις στον υπολογιστή για να διερευνήσουν την επίδραση του εύρους μεταβλητής σε ένα σύστημα ή περιβάλλον. Για αυτόν τον λόγο, πολλά έργα της αξιολόγησης PISA περιλαμβάνουν μόνο μέρη του κύκλου της μοντελοποίησης. Στην πραγματικότητα, η επίλυση προβλημάτων μπορεί επίσης μερικές φορές να κινείται ανάμεσα στις διαδικασίες, επιστρέφοντας για επανεξέταση προηγούμενων αποφάσεων και υποθέσεων. Κάθε μία από τις διαδικασίες μπορεί να παρουσιάσει σημαντικές προκλήσεις και πολλές επαναλήψεις σε ολόκληρο τον κύκλο.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ο ορισμός του μαθηματικού γραμματισμού δεν επικεντρώνεται μόνο στη χρήση των μαθηματικών για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων της καθημερινής ζωής, αλλά επίσης προσδιορίζει τον μαθηματικό συλλογισμό ως βασικό πυλώνα του μαθηματικού γραμματισμού. Το PISA 2021 τονίζει την κεντρική θέση του μαθηματικού συλλογισμού τόσο στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος όσο και στον μαθηματικό γραμματισμό γενικότερα (Σχήμα 1).

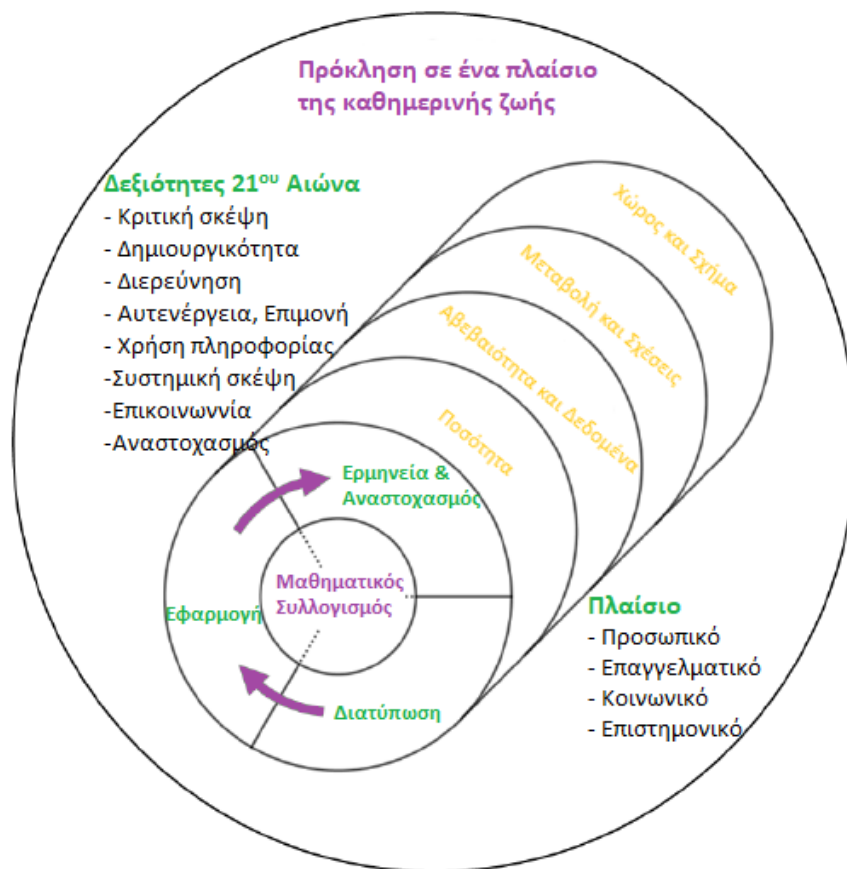
Προκειμένου οι μαθητές/μαθήτριες να είναι μαθηματικά εγγράμματοι/ες θα πρέπει να μπορούν πρώτα να χρησιμοποιούν τη μαθηματική γνώση περιεχομένου για να αναγνωρίζουν τη μαθηματική φύση μιας κατάστασης (πρόβλημα) - ειδικά σε εκείνες τις καταστάσεις που συναντώνται στην πραγματική ζωή - και στη συνέχεια να το διατυπώνουν με μαθηματικούς όρους. Αυτός ο μετασχηματισμός - από μια διφορούμενη κατάσταση της πραγματικής ζωής σε ένα καλά καθορισμένο μαθηματικό πρόβλημα - απαιτεί μαθηματικό συλλογισμό. Όταν ο μετασχηματισμός επιτευχθεί, το μαθηματικό πρόβλημα που προκύπτει μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες που διδάσκονται στα σχολεία. Ωστόσο, ενδέχεται να απαιτείται η λήψη απόφασης σχετικά με το ποιες έννοιες/ διαδικασίες και με ποια σειρά θα αξιοποιηθούν, διαδικασία που αποτελεί, επίσης, μια εκδήλωση του μαθηματικού συλλογισμού. Τέλος, οι μαθητές/μαθήτριες θα πρέπει να αναστοχαστούν σε σχέση με τη μαθηματική λύση ερμηνεύοντας τα αποτελέσματα στο πλαίσιο της αρχικής πραγματικής κατάστασης. Οι μαθητές/μαθήτριες θα πρέπει επιπλέον να διαθέτουν και να είναι σε θέση να επιδεικνύουν υπολογιστικές δεξιότητες σκέψης ως μέρος της ικανότητάς τους για επίλυση προβλήματος. Αυτές οι δεξιότητες, οι οποίες απαιτούνται για τη διατύπωση, την εφαρμογή, τον αναστοχασμό και τον μαθηματικό συλλογισμό, περιλαμβάνουν την αναγνώριση μοτίβων, την αποδόμηση, τον προσδιορισμό των υπολογιστικών εργαλείων και αλγορίθμων (εάν υπάρχουν) που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν για την ανάλυση ή επίλυση του κάθε προβλήματος.

Συνεπώς, ο μαθηματικός γραμματισμός περιλαμβάνει δύο σχετικές πτυχές: τον μαθηματικό συλλογισμό και την επίλυση προβλήματος. Ο μαθηματικός γραμματισμός διαδραματίζει

σημαντικό ρόλο στο να είναι κανείς σε θέση να χρησιμοποιήσει τα μαθηματικά για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Επιπλέον, ο μαθηματικός συλλογισμός (παραγωγικός και επαγωγικός) υπερβαίνει την επίλυση αυτών των προβλημάτων, αφού περιλαμβάνει τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων για σημαντικά οικογενειακά και κοινωνικά θέματα, τα οποία μπορούν να τύχουν μαθηματικού χειρισμού. Περιλαμβάνει επίσης τη λήψη αποφάσεων σχετικά με την εγκυρότητα των πληροφοριών που λαμβάνουν τα άτομα, συμβάλλοντας επίσης στην ανάπτυξη επιλεγμένων δεξιοτήτων του 21ου αιώνα.

Για τους σκοπούς της αξιολόγησης PISA 2022, ο ορισμός του μαθηματικού γραμματισμού μπορεί να αναλυθεί σε τρεις αλληλένδετους πυλώνες (βλ. Σχήμα 2):

- Τον μαθηματικό συλλογισμό (παραγωγικός και επαγωγικός) και την επίλυση προβλήματος (η οποία περιλαμβάνει τις μαθηματικές διαδικασίες που περιγράφουν το τι κάνουν τα άτομα για να συνδέσουν το περιεχόμενο του προβλήματος με τα μαθηματικά και κατά συνέπεια να επιλύσουν το πρόβλημα).
- Το μαθηματικό περιεχόμενο, το οποίο χρησιμοποιείται στις ασκήσεις αξιολόγησης, και
- Το πλαίσιο, στο οποίο εντάσσονται οι ασκήσεις της αξιολόγησης σε συνδυασμό με τις επιλεγμένες δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα που υποστηρίζουν αλλά και αναπτύσσονται από τον μαθηματικό γραμματισμό.



Σχήμα 2. PISA 2022: Η σχέση ανάμεσα στον μαθηματικό συλλογισμό, στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος (μοντελοποίηση), το μαθηματικό περιεχόμενο, το πλαίσιο και επιλεγμένες δεξιότητες του 21^{ου} αιώνα

Στο Σχήμα 2, ο εξωτερικός κύκλος δείχνει ότι ο μαθηματικός συλλογισμός λαμβάνει χώρα στο πλαίσιο μιας πρόκλησης ή ενός προβλήματος που προκύπτει στον πραγματικό κόσμο. Το Σχήμα 2 απεικονίζει επίσης τη σχέση μεταξύ μαθηματικού γραμματισμού (όπως αυτή απεικονίζεται και στο Σχήμα 1) και τους τομείς του μαθηματικού περιεχομένου στους οποίους εφαρμόζεται ο μαθηματικός συλλογισμός. Το πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται η προβληματική κατάσταση, αλλά και οι δεξιότητες του 21ου αιώνα υποστηρίζουν τον μαθηματικό συλλογισμό, αλλά και μπορούν να αναπτυχθούν μέσω αυτού.

Οι κατηγορίες του μαθηματικού περιεχομένου περιλαμβάνουν τα ακόλουθα: «ποσότητα», «αβεβαιότητα και δεδομένα», «μεταβολή και σχέσεις», και «χώρος και σχήμα». Είναι από αυτές τις κατηγορίες μαθηματικού περιεχομένου που οι μαθητές/μαθήτριες πρέπει να αντλήσουν στοιχεία ώστε να διατυπώσουν το μαθηματικό πρόβλημα (μετατρέποντας την πραγματική κατάσταση σε μαθηματική), να επιλύσουν το μαθηματικό πρόβλημα όταν αυτό διατυπωθεί, και στη συνέχεια να το ερμηνεύσουν και να αναστοχαστούν πάνω στη λύση.

Όπως και στους προηγούμενους κύκλους του PISA, οι τέσσερις κατηγορίες πλαισίου που χρησιμοποιούνται για να οριστούν οι καταστάσεις της πραγματικής ζωής είναι το προσωπικό, το κοινωνικό, το εκπαιδευτικό/επαγγελματικό και το επιστημονικό πλαίσιο. Το πλαίσιο μπορεί να είναι προσωπικής φύσης, περιλαμβάνοντας προβλήματα ή προκλήσεις που μπορεί να αντιμετωπίσει ένα άτομο ή μια οικογένεια ή μια ομάδα συνομηλίκων. Παράλληλα, το πρόβλημα μπορεί να ρυθμιστεί είτε σε ένα κοινωνικό πλαίσιο (με έμφαση στην κοινότητα – η οποία μπορεί να είναι σε τοπικό, εθνικό ή παγκόσμιο επίπεδο), είτε σε ένα επαγγελματικό πλαίσιο (με επίκεντρο τον κόσμο/χώρο της εργασίας), ή σε ένα επιστημονικό πλαίσιο (που σχετίζεται με την εφαρμογή των μαθηματικών στη φύση ή στην τεχνολογία).

Για πρώτη φορά στο θεωρητικό πλαίσιο του PISA 2022 (Σχήμα 2) περιλαμβάνονται επιλεγμένες δεξιότητες του 21ου αιώνα στις οποίες στηρίζεται, αλλά και μέσω των οποίων αναπτύσσεται ο μαθηματικός γραμματισμός. Πρέπει να τονιστεί ότι ενώ το πλαίσιο (προσωπικό, κοινωνικό, επαγγελματικό και επιστημονικό) έχει επίδραση στον τρόπο ανάπτυξης των έργων της αξιολόγησης, τα έργα δεν αναπτύσσονται σκόπιμα για να ενσωματώσουν τις δεξιότητες του 21ου αιώνα. Αντίθετα, η προσδοκία είναι ότι ανταποκρινόμενοι στο πνεύμα του θεωρητικού πλαισίου των Μαθηματικών και σύμφωνα με τον ορισμό του μαθηματικού γραμματισμού, οι δεξιότητες του 21ου αιώνα που έχουν προσδιοριστεί ενσωματώνονται μέσα στις ασκήσεις αξιολόγησης.

Βιβλιογραφικές αναφορές

1. Gadavidis, G. (2015), Coding for Young Mathematicians, Western University, London, Ontario, Canada, <http://worlddiscoveries.ca/technology/18155> (accessed on 5 April 2018).
2. Galbraith, P., H. Henn and M. Niss (eds.) (2007), Modelling and Applications in Mathematics Education, Springer US, <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>.
3. Rambally, G. (2017), Applications of Computational Matrix Algebra, AACE, Austin, Texas, <https://www.learntechlib.org/p/177277/>.
4. Wing, J. (2006) Computational Thinking, Communications of the ACM, Vol. 49, No. 3, pp. 33–35.
5. Wing, J. (2011) Computational Thinking – What and Why?, The Magazine of Carnegie Mellon University's School of Computer Science, The LINK, Research Notebook. <https://www.cs.cmu.edu/link/research-notebook-computational-thinking-what-and-why>.